It is proved that in the differential neighbourhood of the first order a field of one-parameter bundle (χ ,) of interior HM-virtual normals is joined to the base M-distribution and in the differential neighbourhood of the order $t \geq 2$ five fields of one-parameter bundles (, χ), (,), (,), (, χ), (,) of the interior HM-virtual normals of the first kind are joined to the same base M-distribution**.**

Constructed fields of the interior HM-virtual normals of the first kind generate respectively in the differential neighbourhood of the first order a bundle of interior nonholonomic compositions of Norden ($\chi_{(\eta)}$, M) of H-distribution, and in the differential neighbourhood of the order $t \geq 2$ five one-parameter families of nonholonomic compositions of Norden.

It becomes clear, that if regular H-distribution is mutual ($\Lambda_{i\alpha} \equiv 0$) then in the neighbourhood of the first order bundle ($\chi_{(\eta)}$; M) degenerates in the nonholonomic composition of Norden (χ, M), and in the neighbourhood of the order $t \geq 2$ from five one-parameter families of nonholonomic compositions remain only three families corresponding to the fields of one-parameter bundles (, χ), (, χ), (,) of HM-virtual normals of the first order.

УДК 514.75

ЦЕНТРИРОВАННЫЕ ТАНГЕНЦИАЛЬНО ВЫРОЖДЕННЫЕ ГИПЕРПОЛОСЫ CH^r_m РАНГА r ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P_n

Ю. И . П о п о в , Т. Ю. П о п о в а

(Калининградский государственный университет)

Рассматриваются центрированные тангенциально вырожденные гиперполосы $CH^r_m \subset P_n$. Дано задание и приведена теорема существования гиперполосы CH^r_m (§1). Построены однопараметрические пучки обобщенных нормалей 1-го и 2-го рода в окрестности 3-го порядка. Показано, что двойственные друг другу однопараметрические пучки нормалей 1-го и 2-го рода обобщенной нормализации гиперполосы CH^r_m взаимны относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (§2). В дифференциальной окрестности 3-го порядка внутренним инвариантным образом присоединяется к поверхности центров $V_r \subset CH^r_m$ однопараметрическое семейство ее оснащающих плоскостей в смысле Э.Картана (§2). С помощью фокальных многообразий, ассоциированных с гиперполосой CH^r_m, выясняется геометрический смысл некоторых основных квазитензоров гиперпо-

лосы CH_m^r. Показано, что в каждом центре A_o в дифференциальной окрестности 3-го порядка к гиперполосе CH_m^r присоединяется внутренний однопараметрический пучок ее нормалей второго рода $N_{m-1}(A_o)$, осью которого является B-плоскость (§3).

Используется следующая схема индексов:

$$I,J,K,L=\overline{0,n}\ ;\ p,q,r,s,t,f=\overline{1,r}\ ;\ i,j,k=\overline{r+1,m}\ ;\ \alpha,\beta,\gamma=\overline{m+1,n-1}\ ;$$

$$\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}=\overline{m+1,n}\ ;\ s=m-r.$$

Символ δ обозначает дифференцирование по вторичным параметрам, а π_K^I - значения форм ω_K^I при фиксированных главных параметрах. В этом случае оператор ∇ обозначается символом ∇_δ.

§1. Задание центрированной тангенциально-вырожденной гиперполосы CH_m^r ранга r в проективном пространстве P_n

В проективном пространстве P_n наряду с точечным подвижным репером $\{A_I\}$ рассмотрим двойственный ему репер $\{\tau^K\}$, элементы которого являются гранями репера $\{A_I\}$:

$$\left(A_I,\tau^K\right)=\delta_I^K. \tag{1.1}$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений данных реперов принимают следующий вид:

$$dA_I=\omega_I^K A_K,\ d\tau^I=-\omega_K^I\tau^K, \tag{1.2}$$

где формы ω_I^K имеют проективную структуру:

$$d\omega_I^K=\omega_I^L\wedge\omega_L^K,\ \sum_I\omega_I^I=0. \tag{1.3}$$

Присоединим к изучаемому образу CH_m^r подвижной репер нулевого порядка, полагая $A_o=A$, $\tau^n=\tau$, где A - центр плоской образующей $E_s\left(A_o\right)$ ($s=m-r$), а $\tau\left(A_o\right)$ - главная касательная гиперплоскость гиперполосы CH_m^r. Для гиперполосы CH_m^r имеем: $\left(dA_o,\tau^n\right)=\left(A_o,d\tau^n\right)=0$. Откуда в силу (1.1), (1.2) получим $\omega_o^n=0$.

Элемент $\left(A_o,\tau^n\right)$ гиперполосы CH_m^r зависит от r существенных параметров $\{u^p\}$, которые назовем главными. При изменении главных параметров $\{u^p\}$ точка A_o описывает r-мерную поверхность V_r - поверхность центров плоских образующих E_s базисной поверхности V_m^r гиперполосы CH_m^r, а семейство главных касательных гиперплоскостей τ^n огибает некоторую тангенциально-вырожденную гиперповерхность V_{n-1}^r. Плоские $(n-r-1)$-мерные образующие E_{n-r-1} гиперповерхности V_{n-1}^r являются характеристиками вырожденной гиперполосы CH_m^r, причем $E_s(A_o) \subset E_{n-r-1}(A_o)$ [1].

Специализируем репер, поместив точки A_p в касательную плоскость T_r поверхности V_r, точки A_i - в плоскость $E_s(A_o)$, точки A_α - в характеристическую плоскость $E_{n-r-1}(A_o)$ гиперполосы CH_m^r, а точка A_n пусть занимает произвольное положение, образуя с точками A_o, A_p, A_i, A_α проективный репер пространства P_n. Этот репер назовем репером первого порядка R_1 гиперполосы CH_m^r.

Так как $dA_o = \omega_o^o A_o + \omega_o^p A_p$, то

$$\omega_o^i = \omega_o^\alpha = \omega_o^n = 0. \tag{1.4}$$

Таким образом, уравнения (1.4) задают направляющую поверхность V_r базисной поверхности V_m^r гиперполосы CH_m^r. Точки A_i, A_α лежат в характеристике $E_{n-r-1}(A_o)$ гиперполосы CH_m^r, поэтому

$$\left(d\tau^n, A_i\right) = 0, \left(d\tau^n, A_\alpha\right) = 0. \tag{1.5}$$

Учитывая формулы (1.1), (1.2) в соотношениях (1.5), находим

$$\omega_i^n = 0, \; \omega_\alpha^n = 0. \tag{1.6}$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений плоского элемента $\left(A_o, \tau^n\right)$ гиперполосы CH_m^r с учетом (1.4), (1.6) представим в виде

$$dA_o = \omega_o^o A_o + \omega_o^p A_p \,, \;\; d\tau^n = -\omega_p^n \tau^p - \omega_n^n \tau^n. \tag{1.7}$$

Следовательно, формы $\omega^p \equiv \omega_o^p$ определяют перемещение точки A_o по поверхности V_r и поэтому являются независимыми линейными комбинациями дифференциалов du^p главных параметров - базисными формами гиперполосы CH_m^r [2], отнесенной к подвижному точечному реперу $\{A_I\}$.

Аналогично, формы ω_p^n определяют перемещение гиперплоскости τ^n и, следовательно, являются базисными формами гиперполосы CH_m^r, отнесенной к подвижному тангенциальному реперу $\left\{\tau^I\right\}$. При фиксации точки A_o плоскости

$T_r(A_o)$, $E_s(A_o)$, $T_m(A_o)$, $E_{n-r-1}(A_o)$, $\tau^n(A_o)$ неподвижны. В силу этого формы ω_p^n, ω_p^i, ω_p^α, ω_i^p, ω_α^p будут главными, т.е.

$$\omega_p^n = a_{pq}\omega^q,\ \ \omega_p^i = b_{pq}^i\omega^q,\ \ \omega_p^\alpha = b_{pq}^\alpha\omega^q,\ \ \omega_i^p = b_{iq}^p\omega^q,\ \ \omega_\alpha^p = b_{\alpha q}^p\omega^q. \quad (1.8)$$

Уравнения

$$\omega_i^n = 0,\ \ \omega_i^\alpha = 0 \quad (1.9)$$

характеризуют условие постоянства касательной плоскости T_m вдоль плоской образующей E_s.

Замыкая уравнения (1.4), в силу (1.3), имеем

$$a_{[pq]} = 0,\ \ b_{[pq]}^i = 0,\ \ b_{[pq]}^\alpha = 0. \quad (1.10)$$

При замыкании уравнений (1.6), (1.9) получим

$$b_{i[q}^p a_{t]p} = 0,\ \ b_{\alpha[q}^p a_{t]p} = 0,\ \ b_{i[q}^p b_{t]p}^\alpha = 0. \quad (1.11)$$

В силу того, что формы ω_p^n и ω^q линейно независимы, для матрицы $\|a_{pq}\|$ можно найти обратную $\|a^{pq}\|$, элементы которых связаны соотношениями

$$a_{pq}\cdot a^{qt} = \delta_p^t. \quad (1.12)$$

Разложим главные формы ω^t, ω_p^i, ω_p^α, ω_i^p, ω_α^p по базисным формам ω_p^n тангенциального репера $\{\tau^I\}$:

$$\omega^p = a^{pt}\omega_t^n,\ \omega_p^i = \lambda_p^{iq}\omega_q^n,\ \omega_p^\alpha = \lambda_p^{\alpha q}\omega_q^n,\ \omega_i^p = \lambda_i^{pq}\omega_q^n,\ \omega_\alpha^p = \lambda_\alpha^{pq}\omega_q^n, \quad (1.13)$$

где

$$\lambda_p^{iq} = b_{pt}^i a^{tq},\ \lambda_p^{\alpha q} = b_{pt}^\alpha a^{tq},\ \lambda_\alpha^{pq} = b_{\alpha t}^p a^{tq},\ \lambda_i^{pq} = b_{it}^p a^{tq}. \quad (1.14)$$

Замыкая уравнения (1.4), (1.6), (1.9), соответственно получим

$$a^{p[q}\lambda_p^{|i|t]} = 0,\ a^{p[q}\lambda_p^{|\alpha|t]} = 0,\ \lambda_i^{p[q}\lambda_p^{|\alpha|t]} = 0;\ a^{[pq]} = 0,\ \lambda_i^{[pq]} = 0;\ \lambda_\alpha^{[pq]} = 0. \quad (1.15)$$

Из (1.14), учитывая соотношения (1.12), находим

$$b_{iq}^p = \lambda_i^{pt}a_{tq},\ b_{\alpha q}^p = \lambda_\alpha^{pt}a_{tq}. \quad (1.16)$$

В силу симметричности матриц $\|\lambda_i^{pt}\|$, $\|\lambda_\alpha^{pt}\|$, $\|a_{tq}\|$ из (1.16) следует, что величины b_{iq}^p и $b_{\alpha q}^p$ также симметричны относительно индексов p, q.

Замыкание уравнений (1.8) приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases}\nabla a_{pq} + a_{pq}\left(\omega_o^o + \omega_n^n\right) = a_{pqt}\omega^t, \\ \nabla b_{pq}^i + b_{pq}^i\omega_o^o + a_{pq}\omega_n^i + b_{pq}^\alpha\omega_\alpha^i = b_{pqt}^i\omega^t, \\ \nabla b_{pq}^\alpha + b_{pq}^\alpha\omega_o^o + a_{pq}\omega_n^\alpha = \tilde{b}_{pqt}^\alpha\omega^t, \\ \nabla b_{iq}^p + b_{iq}^p\omega_o^o - \delta_q^p\omega_i^o = \tilde{b}_{iqt}^p\omega^t, \\ \nabla b_{\alpha q}^p + b_{\alpha q}^p\omega_o^o - \delta_q^p\omega_\alpha^o - b_{iq}^p\omega_\alpha^i = b_{\alpha qt}^p\omega^t,\end{cases} \tag{1.17}$$

где величины a_{pqt}, b_{pqt}^i, $b_{\alpha qt}^p$ симметричны по индексам p, q, t, а величины $\tilde{b}_{pqt}^\alpha$, $\tilde{b}_{iqt}^p$ симметричны по индексам p, q. Система величин $\left\{a^{pq}\right\}$, введенных соотношениями (1.12), образует тензор:

$$\nabla a^{pq} - a^{pq}\left(\omega_o^o + \omega_n^n\right) = a^{pqt}\omega_t^n, \tag{1.18}$$

где $a^{pqt} = -a_{rsf}a^{pr}a^{qs}a^{tf}$.

Итак, *система уравнений (1.4), (1.6), (1.8), (1.17), коэффициенты которых связаны соотношениями (1.11), задает центрированную тангенциально вырожденную гиперполосу* CH_m^r *проективного пространства* P_n *относительно точечного репера* $\left\{A_I\right\}$ *первого порядка* R_1.

Продолжая уравнения (1.13), с учетом (1.18), (1.13), получим

$$\begin{cases}\nabla\lambda_p^{iq} - \lambda_p^{iq}\omega_n^n + \lambda_p^{\alpha q}\omega_\alpha^i + \delta_p^q\omega_n^i = \lambda_p^{iqt}\omega_t^n, \\ \nabla\lambda_p^{\alpha q} - \lambda_p^{\alpha q}\omega_n^n + \delta_p^q\omega_n^\alpha = \tilde{\lambda}_p^{\alpha qt}\omega_t^n, \\ \nabla\lambda_i^{pq} - \lambda_i^{pq}\omega_n^n - a^{pq}\omega_i^o = \tilde{\lambda}_i^{pqt}\omega_t^n, \\ \nabla\lambda_\alpha^{pq} - \lambda_\alpha^{pq}\omega_n^n - \lambda_i^{pq}\omega_\alpha^i - a^{pq}\omega_\alpha^o = \lambda_\alpha^{pqt}\omega_t^n.\end{cases} \tag{1.19}$$

Таким образом, *система уравнений (1.4), (1.6), (1.13), (1.18), (1.19), коэффициенты которых удовлетворяют соотношениям (1.15), задает центрированную тангенциально вырожденную гиперполосу* CH_m^r *проективного пространства* P_n *относительно тангенциального репера* $\left\{\tau^K\right\}$ *первого порядка* R_1.

Имеет место

Теорема 1. *В n-мерном проективном пространстве* P_n *центрированная тангенциально вырожденная гиперполоса* CH_m^r *существует с произволом 2n-2r-1 функций r аргументов.*

§2. Геометрические образы, ассоциированные с гиперполосой $CH_m^r \subset P_n$

1. Если в каждом центре $A_o \in V_r$ задана (n-r)-мерная плоскость (A_o), проходящая через нормаль 1-го рода (A_o) гиперполосы CH_m^r и через соответствующую плоскую образующую $E_s(A_o)$, то будем говорить, что задано на поверхности V_r *нормальное поле* *(n-r)-мерных направлений* (плоскостей (A_o)) [3].

Определение [3]. Нормализацию гиперполосы CH_m^r, в каждой точке $A_o \in V_r$ которой заданы *нормаль 2-го рода* (A_o) *поверхности* V_r и *(n-r)-мерная плоскость* (A_o) *нормального поля* , назовем *обобщенной нормализацией* данной гиперполосы CH_m^r. Плоскости (A_o) и (A_o) соответственно назовем *обобщенными нормалями 1-го* и *2-го рода* гиперполосы CH_m^r.

Рассмотрим присоединенное к гиперполосе CH_m^r поле прямых

$$l(A_o) = [A_o, P], \text{ где } P = A_n + x^p A_p + x^i A_i + x^\alpha A_\alpha,$$

каждая из которых проходит через точку A_o направляющей поверхности V_r (поверхности центров плоских образующих гиперполосы CH_m^r) и не лежит в касательной гиперплоскости $\tau^n(A_o)$.

Из условия инвариантности прямой l, т.е. $\delta l = \theta l$, находим

$$\nabla_\delta x^i = x^i \pi_n^n - x^\alpha \pi_\alpha^i - \pi_n^i, \tag{2.1}$$

$$\nabla_\delta x^\alpha = x^\alpha \pi_n^n - \pi_n^\alpha, \tag{2.2}$$

$$\nabla_\delta x^p = x^p \pi_n^n - \pi_n^p. \tag{2.3}$$

Следуя работам [1]-[4], находим охваты величин $\{x^i\}$, $\{x^\alpha\}$, $\{x^p\}$, удовлетворяющие соответственно (2.1)-(2.3):

$$x^i = \overline{\Lambda}^i == \frac{1}{r} a^{pq} b_{pq}^i, \; x^\alpha = \Lambda^\alpha == \frac{1}{r} a^{pq} b_{pq}^\alpha,$$

$$x^p = -T^p + \mu(\Lambda^p + T^p) = (\mu - 1)T^p + \mu\Lambda^p.$$

В результате получаем пучок прямых

$$l(\mu) = [A_o, P(\mu)] = \left[A_o, A_n + \{(\mu-1)T^p + \mu\Lambda^p\}A_p + \overline{\Lambda}^i A_i + \Lambda^\alpha A_\alpha\right], \tag{2.4}$$

внутренним инвариантным образом присоединенный к гиперполосе CH_m^r в дифференциальной окрестности 3-го порядка гиперполосы CH_m^r.

Замечание. Для регулярных m-мерных гиперполос $R\,H_m \subset P_n$ аналогичный пучок прямых (2.4) впервые был рассмотрен А.В.Столяровым [4].

Пучок проективных прямых (2.4) дает возможность построить пучок нормалей 1-го рода (A_o) обобщенной нормализации гиперполосы CH_m^r в дифференциальной окрестности 3-го порядка. Действительно, каждую инвариантную нормаль 1-го рода (A_o) можно рассматривать как (n-r)-плоскость, натянутую на инвариантную прямую $l(A_o)$ и характеристику $E_{n-r-1}(A_o)$ гиперполосы CH_m^r [2], [4]:

$$_{n-r}(\mu) == \left[E_{n-r-1}(A_o); l(\mu)\right]. \qquad (2.5)$$

Пучок (2.5) внутренних инвариантных нормалей 1-го рода (A_o) обобщенной нормализации гиперполосы CH_m^r можно представить и в таком виде:

$$_{n-r}(\mu) = \left[\eta^p(\mu)\right] = \left[\tau^p - \left(\mu\Lambda^p + (\mu - 1)T^p\right)\tau^n\right]. \qquad (2.6)$$

Отметим, что *задание поля* квазитензора $\{y^p\}$, определяемого уравнениями

$$\nabla y^p = y^p\omega_n^n + \omega_n^p + y_t^p\omega^t, \qquad (2.7)$$

порождает поле инвариантных обобщенных нормалей 1-го рода (A_o) гиперполосы CH_m^r:

$$_{n-r}(A_o) = \left[E_{n-r-1}(A_o), A_n + y^p A_p + \overline{\Lambda}^i A_i + \Lambda^\alpha A_\alpha\right] = \left[\tau^p + y^p\tau^n\right]. \quad (2.8)$$

Подразумевая это, в дальнейшем под полем инвариантных обобщенных нормалей 1-го рода (2.8) будем понимать поле соответствующего квазитензора $\{y^p\}$.

2. Установим некоторое соответствие между нормалями 1-го и 2-го рода обобщенной нормализации гиперполосы CH_m^r. Введем в рассмотрение квазитензор

$$_p = -a_{pq}\nu^q + d_p, \qquad \nabla_\delta \qquad = - \qquad _p\pi_o^o - \pi_p^o, \qquad (2.9)$$

где $\{\nu^q\}$ - квазитензор, удовлетворяющий условиям (2.7). Квазитензор { } задает нормаль 2-го рода поверхности V_r, т.е. обобщенную нормаль 2-го рода гиперполосы CH_m^r:

$$_p x^p - x^o = 0,\ x^\alpha = 0,\ x^i = 0,\ x^n = 0. \qquad (2.10)$$

Замечание. Из уравнений (1.4), (1.6), (1.8), (1.17) вытекает, что с вырожденной гиперполосой CH_m^r ассоциируется регулярная гиперполоса RH_r, базисной поверхностью которой является V_r (поверхность центров плоских образующих). Характеристика $X_{n-r-1}(A_o)$ этой гиперполосы RH_r есть характеристика $E_{n-r-1}(A_o)$ вырожденной гиперполосы CH_m^r и, следовательно, проходит через плоскую образующую $E_s(A_o)$ в соответствующем центре A_o:

$$E_s(A_o) \subset X_{n-r-1}(A_o) \equiv E_{n-r-1}(A_o).$$

Плоскость (2.10) можно трактовать как нормаль 2-го рода в смысле Нордена гиперполосы RH_r, а нормаль $\quad (A_o)$ - как нормаль 1-го рода Нордена гиперполосы RH_r.

Таким образом, *обобщенную нормализацию гиперполосы* CH_m^r *можно интерпретировать как нормализацию в смысле Нордена регулярной гиперполосы* RH_r, *ассоциированной с данной вырожденной гиперполосой* CH_m^r.

Уравнения (2.9) можно разрешить относительно ν^p:

$$\nu^p = \quad {}_q a^{pq} + d^p. \tag{2.11}$$

Итак, с помощью формул (2.9), (2.11) устанавливается биекция между нормалями *обобщенной нормализации* гиперполосы CH_m^r.

В биекции (2.9) пучку $\quad {}^p(\mu) = -\mu\Lambda^p + (1-\mu)T^p$ нормалей 1-го рода (A_o) соответствует однопараметрический пучок инвариантных нормалей 2-го рода $\quad (A_o)$:

$$ {}_p(\mu) = -\mu\Lambda_p + (1-\mu)T_p, \tag{2.12}$$

где $\Lambda_p = -a_{pq}\Lambda^q + d_p,\ T_p = -a_{pq}T^q + d_p$.

Аналогично, как это сделано в работах [2], [4], можно показать, что пучки нормалей 1-го и 2-го рода обобщенной нормализации гиперполосы CH_m^r будут взаимны относительно поля соприкасающихся гиперквадрик:

$$\begin{gathered} a_{pq}x^p x^q + L_{ij}x^i x^j + L_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + 2L_{i\alpha}x^i x^\alpha + 2l_i x^i x^n + 2l_\alpha x^\alpha x^n + \\ + 2d_p x^p x^n + (T_o + u_1 k_o + u_2 l_o)(x^n)^2 = 2x^o x^n. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Теорема 2. *Двойственные друг другу однопараметрические пучки нормалей 1-го и 2-го рода обобщенной нормализации гиперполосы* CH_m^r *взаимны относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (2.13) и внутренним инвариантным образом присоединяются к гиперполосе* CH_m^r *в дифференциальной окрестности 3-го порядка.*

3. Рассмотрим инвариантную плоскость

$$K_{n-r-1}(A_o) = [K_n, K_\alpha, K_p], \tag{2.14}$$

где

$$\begin{cases} K_n = A_n + \nu_n^o A_o + \nu_n^p A_p + \overline{\Lambda}^i A_i + \Lambda^\alpha A_\alpha, \\ K_\alpha = A_\alpha + \nu_\alpha^o A_o + t_\alpha^i A_i, \qquad K_i = A_i + \nu_i^o A_o, \end{cases} \tag{2.15}$$

не проходящую через точку A_o и не лежащую в касательной гиперплоскости $\tau^n(A_o)$. Из условия инвариантности плоскости (2.14) следует, что коэффициенты в разложениях (2.15) подчинены дифференциальным уравнениям:

$$\begin{cases} d\nu_n^o + \nu_n^o\left(\omega_o^o - \omega_n^n\right) + \nu_n^p\omega_p^o + \overline{\Lambda}^i\omega_i^o + \Lambda^\alpha\omega_\alpha^o + \omega_o^n = \nu_{np}^o\omega^p, \\ \nabla\nu_n^p = \omega_n^n\nu_n^p - \omega_n^p + \nu_{nq}^p\omega^q, \\ \nabla\nu_\alpha^o + \nu_\alpha^o\omega_o^o + t_\alpha^i\omega_i^o + \omega_\alpha^o = \nu_{\alpha p}^o\omega^p, \\ \nabla\nu_i^o + \nu_i^o\omega_o^o + \omega_i^o = \nu_{ip}^o\omega^p. \end{cases} \tag{2.16}$$

Уравнения (2.16) выполняются, если рассмотреть следующие охваты функций [1], [2]:

$$\begin{cases} \nu_n^o = \frac{1}{2}\left(\overline{T} - \Lambda_i\Lambda^i - \Lambda_\alpha\Lambda^\alpha + a_{pq}\nu_n^p\nu_n^q\right) + \nu_n^p d_p, \\ \nu_n^p(\mu) = \mu\Lambda^p + (\mu - 1)T^p, \quad \nu_\alpha^o = -\frac{1}{r}a_{pq}\lambda_\alpha^{pq} == -\overline{\Lambda}_\alpha, \\ \nu_i^o = -\frac{1}{r}a_{pq}\lambda_i^{pq} == -\Lambda_i \end{cases} \tag{2.17}$$

где μ - инвариантный параметр. Непосредственной проверкой убеждаемся, что прямая $l_1 = [A_o K_n]$ инвариантна относительно преобразований стационарной группы G_o образующего элемента гиперполосы CH_m^r. Плоскость $_{n\text{-}r}(A_o) = [l_1(A_o), E_{n-r-1}(A_o)]$, натянутую на прямую $l_1(A_o)$ и характеристику $E_{n-r-1}(A_o)$ гиперполосы CH_m^r, можно рассматривать как плоскость некоторого нормального поля , внутренним образом присоединенного к гиперполосе CH_m^r в дифференциальной окрестности 3-го порядка. Тогда плоскость $K_{n-r-1}(A_o)$ (2.14) интерпретируем как нормаль 2-го рода в смысле Нордена плоскости $_{n\text{-}r}(A_o) = [l_1(A_o), E_{n-r-1}(A_o)]$ *нормального поля* гиперполосы CH_m^r. С другой стороны, плоскость $K_{n-r-1}(A_o)$ можно рассматривать как оснащающую плоскость в смысле Э.Картана поверхности центров $V_r \subset CH_m^r$ в данной точке A_o. Резюмируя, приходим к выводам.

Теорема 3. *В дифференциальной окрестности 3-го порядка с каждой плоскостью* (A_o) *нормального поля* *гиперполосы* CH_m^r *внутренним инвариантным образом ассоциируется однопараметрическое семейство ее нормалей 2-го рода* K_{n-r-1} *в смысле Нордена.*

Теорема 3*. *В дифференциальной окрестности 3-го порядка внутренним инвариантным образом присоединяется к поверхности центров* $V_r \subset CH_m^r$

однопараметрическое семейство ее оснащающих плоскостей K_{n-r-1} *(2.14) в смысле Э.Картана.*

§3. **Фокальные многообразия, ассоциированные с гиперполосой** CH_m^r

1. Выясним геометрический смысл некоторых основных квазитензоров гиперполосы CH_m^r. Пусть гиперполоса CH_m^r оснащена полем нормалей 1-го рода в смысле Нордена - Чакмазяна [6]. Точку A_n репера R_1 поместим в нормаль 1-го рода $N_{n-m}(A_o)$ гиперполосы CH_m^r, а точки $\{A_\alpha\}$ в плоскость $E_{n-m-1}(A_o)=N_{n-m}(A_o)\cap E_{n-r-1}(A_o)$. Тогда

$$t_\alpha^i = 0,\ \omega_\alpha^i = N_{\alpha q}^i\omega^q,\ \omega_\alpha^p = N_{\alpha q}^p\omega^q,\ \omega_n^p = N_{nq}^p\omega^q. \tag{3.1}$$

Такой репер R_1 1-го порядка назовем репером R_1(N), адаптированным полю нормалей 1-го рода $E_{n-m}(A_o)$ гиперполосы CH_m^r.

Рассмотрим *нормальное поле* плоскостей (A_o) гиперполосы CH_m^r. Относительно репера R_1(N) конечные уравнения плоскости (A_o) имеют вид

$$x^p = 0. \tag{3.2}$$

Определение [6], [7]. Точку F, принадлежащую некоторому (исходному) элементу поля плоскостей, заданного на поверхности $V_r \subset CH_m^r$, будем называть фокальной точкой этого элемента, соответствующей данному на поверхности V_r направлению, если точка F принадлежит и соседнему элементу этого поля, полученному при смещении точки A_o по поверхности V_r в этом направлении.

Точка $F\in$ (A_o) определяется координатами x^I, удовлетворяющими уравнению (3.2). При смещении плоскости (A_o) вдоль кривой

$$\omega_o^\alpha = 0,\ \omega_o^n = 0,\ \omega_o^i = 0,\ \omega^q = \rho^q\theta,\ d\theta = \theta\wedge\theta_1 \tag{3.3}$$

поверхности V_r точка $F(x^I)$ перейдет в новую точку $\tilde{F}$ $(\tilde{x}^I)$, где

$$\tilde{x}^I \cong x^I - \omega_K^I x^K. \tag{3.4}$$

Потребуем, чтобы точка $\tilde{F}\in$ (A_o). Тогда из (3.4) следует

$$\omega_o^p x^o + \omega_i^p x^i + \omega_\alpha^p x^\alpha + \omega_n^p x^n = 0,\quad x^p = 0. \tag{3.5}$$

Найдем фокальное многообразие, принадлежащее плоскости (A_o) при смещении точки A_o вдоль кривых (3.3), принадлежащих полю касательных плоскостей T_r поверхности V_r. Учитывая (3.1), (1.8), (3.3), уравнения (3.5) приведем к виду

$$\left(\delta_q^p x^o + N_{\alpha q}^p x^\alpha + N_{nq}^p x^n + b_{iq}^p x^i\right)\rho^q = 0,\ x^p = 0. \qquad (3.6)$$

Нетривиальные решения уравнений (3.6) относительно ρ^q получаем при условиях

$$x^p = 0, \quad \det\left\|\delta_p^q x^o + N_{\alpha q}^p x^\alpha + N_{nq}^p x^n + b_{iq}^p x^i\right\| = 0. \qquad (3.7)$$

Уравнения (3.7) определяют фокальное многообразие в плоскости

(A_o), соответствующее смещению точки A_o по кривым (3.3), принадлежащих полю касательных плоскостей T_r поверхности V_r. В общем случае мы получаем алгебраическое многообразие размерности n-r-1 порядка r, которое обозначим $\Phi_{n-r-1}(\quad)$. Соответствующая плоская образующая $E_s(A_o)$ пересекает многообразие $\Phi_{n-r-1}(\quad)$ по алгебраическому многообразию $\Phi_{s-1}(E_s)$ порядка r размерности s-1:

$$\det\left\|\delta_q^p x^o + b_{iq}^p x^i\right\| = 0, \quad x^{\$} = 0, \quad x^p = 0. \qquad (3.8)$$

Линейная поляра точки A_o относительно фокального многообразия $\Phi_{s-1}(E_s)$ задается уравнениями:

$$x^o - B_i x^i = 0, \quad x^{\$} = 0, \quad x^p = 0, \qquad (3.9)$$

где

$$B_i = -\tfrac{1}{r} b_{ip}^p, \quad \nabla B_i + \omega_o^o B_i + \omega_i^o = B_{ip}\omega^p. \qquad (3.10)$$

Дифференциальные уравнения (3.10) задают поле нормалей 2-го рода $B_{r-1}(A_o)$ плоских образующих $E_s(A_o)$ гиперполосы CH_m^r. Плоскость $B_{r-1}(A_o)$, определяемую квазитензором $\{B_i\}$ (3.10) в каждом центре $A_o \in CH_m^r$, назовем B-плоскостью. Выясняется, таким образом, геометрический смысл квазитензора $\{B_i\}$ (3.10).

Теорема 4. *Поле квазитензора* $\{B_i\}$ *(3.10) задает поле B-плоскостей - нормалей 2-го рода плоских образующих* $E_s(A_o)$ *гиперполосы* CH_m^r*, каждая из которых является линейной полярой точки* A_o *относительно фокального многообразия* $\Phi_{s-1}(E_s)(A_o)$ *(3.8).*

2. Пересечение плоскости $E_{n-m-1}(A_o)$ с фокальным многообразием $\Phi_{n-r-1}(\quad)$ (3.7) есть алгебраическое многообразие размерности n-m-2 порядка r:

$$\det\left\|x^o\delta_q^p + N_{\alpha q}^p x^\alpha\right\| = 0,\ x^n = 0,\ x^i = 0,\ x^p = 0, \tag{3.11}$$

которое обозначим $\Phi_{n-m-2}\left(E_{n-m-1}\right)$.

Линейная поляра центра A_o относительно фокального многообразия $\Phi_{n-m-2}\left(E_{n-m-1}\right)$ есть плоскость $\pi_{n-m-2}\left(A_o\right)\subset E_{n-m-1}\left(A_o\right)$, $A_o \notin \pi_{n-m-2}\left(A_o\right)$:

$$x^o - N_\alpha x^\alpha = 0,\ x^n = 0,\ x^i = 0,\ x^p = 0, \tag{3.12}$$

где

$$N_\alpha = -\tfrac{1}{r}N_{\alpha p}^p, \quad \nabla N_\alpha + N_\alpha \omega_o^o + \omega_\alpha^o = N_{\alpha p}\omega^p. \tag{3.13}$$

Таким образом, выясняется геометрический смысл квазитензора $\left\{N_\alpha\right\}$ (3.13): *поле квазитензора* $\left\{N_\alpha\right\}$ *(3.13) задает поле плоскостей* $\pi_{n-m-2}\left(A_o\right)$ *(3.12), каждая из которых в соответствующей точке* A_o *является линейной полярой точки* A_o *относительно фокального многообразия (3.11).*

3. Характеристическая плоскость $E_{n-r-1}(A_o)$ гиперполосы CH_m^r пересекает фокальное многообразие $\Phi_{n-r-1}(\quad)$ (3.7) по многообразию

$$\det\left\|x^o\delta_q^p + b_{iq}^p x^i + N_{\alpha q}^p x^\alpha\right\| = 0,\ \ x^p = 0,\ \ x^n = 0, \tag{3.14}$$

которое обозначим $\Phi_{n-r-2}\left(X\right)$. Фокальное многообразие (3.14), лежащее в характеристике $E_{n-r-1}(A_o)\subset CH_m^r$, представляет собой многообразие размерности n-r-2 порядка r. Линейная поляра точки A_o относительно фокального многообразия $\Phi_{n-r-2}\left(X\right)$ (3.14) есть плоскость $\pi_{n-r-2}(A_o)\subset E_{n-r-1}(A_o)$, $A_o \notin \pi_{n-r-2}(A_o)$:

$$x^o - N_\alpha x^\alpha - B_i x^i = 0,\ \ x^p = 0,\ \ x^n = 0, \tag{3.15}$$

где

$$N_\alpha = -\tfrac{1}{r}N_{\alpha p}^p,\ B_i = -\tfrac{1}{r}b_{ip}^p.$$

Итак, выясняется геометрический смысл квазитензора $\left\{N_\alpha, B_i\right\}$. *Квазитензор* $\left\{N_\alpha, B_i\right\}$ *задает в каждом центре* $A_o \in V_r$ *нормаль 2-го рода* $\pi_{n-r-2}(A_o)$ *характеристики* $E_{n-r-1}(A_o)$*, которая является линейной полярой точки* A_o *относительно фокального многообразия* $\Phi_{n-r-2}\left(X\right)$ *(3.14).*

4. Пересечение нормали 1-го рода $N_{n-m}(A_o)$ гиперполосы CH^r_m с фокальным многообразием $\Phi_{n-r-1}(\quad)$ (3.7) есть алгебраическое многообразие размерности n-m-1 порядка r:

$$\det\left\| x^o\delta^p_q + N^p_{\alpha q}x^\alpha + N^p_{nq}x^n \right\| = 0,\ \ x^p = 0,\ \ x^i = 0, \qquad (3.16)$$

которое обозначим $\Phi_{n-m-1}(N)$.

Линейная поляра центра A_o относительно многообразия (3.16) есть плоскость $\pi_{n-m-1}(A_o)$:

$$x^o - N^o_\alpha x^\alpha_o - N^o_n x^n_o = 0,\ \ x^p = 0,\ \ x^i = 0, \qquad (3.17)$$

где

$$N^o_n = -\tfrac{1}{r}N^p_{np},\ \nabla N^o_n + N^o_n\omega^o_o + \omega^o_n = N^o_{np}\omega^p. \qquad (3.18)$$

Выясняется, таким образом, геометрический смысл квазитензора

$$N^o_{\$} = -\tfrac{1}{r}N^p_{\$p}. \qquad (3.19)$$

Квазитензор (3.19) задает в каждом центре $A_o \in V_r$ *оснащающую плоскость в смысле Э.Картана нормали* $N_{n-m}(A_o)$ *1-го рода гиперполосы* CH^r_m.

Из результатов §2, §3 следует, что плоскость $N_{n-m}(A_o) = \left[B_{r-1}(A_o),\ \ {}_{r\text{-}1}(A_o)\right]$, натянутая на B-плоскость (3.9) и на любую нормаль 2-го рода $\quad(A_o)$ (2.10) из пучка (2.12), есть нормаль 2-го рода $N_{m-1}(A_o)$ гиперполосы CH^r_m. Отсюда следует

Теорема 5. *В дифференциальной окрестности 3-го порядка в каждом центре* A_o *гиперполосы* CH^r_m *внутренним инвариантным образом присоединяется однопараметрический пучок ее нормалей 2-го рода, осью которого является B-плоскость* $B_{r-1}(A_o)$ *(3.9).*

Библиографический список

1. Попов Ю.И. Внутренние оснащения вырожденной r-мерной гиперполосы H^r_m ранга r многомерного проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1975. Вып. 6. С.102-142.

2. Попов Ю.И. Общая теория регулярных гиперполос. Учебное пособие. Калинингр. ун-т. Калининград, 1983. 82 с.

3. Попов Ю.И. Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1970. Вып. 1. С. 27-46.

4. Столяров А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы // Изв. вузов. Математика. 1975. № 10. С. 97-99.

5. Чакмазян А.В. Двойственная нормализация // ДАН Арм. ССР. 1959. Т. 28. № 4. С. 151-157.

6. Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М. Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.

7. Остиану Н.М. Распределение m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Там же. С. 95-114.